1. LA TRAVE CONTINUA E L'EQUAZIONE DEI TRE MOMENTI

Sistemi Piani di Travi

Nello spazio una trave ha 6 gradi di libertà (g.d.l.): 3 rotazioni e 3 traslazioni. Nel piano, invece, i gradi si riducono a 3 con 1 rotazione e 2 traslazioni.

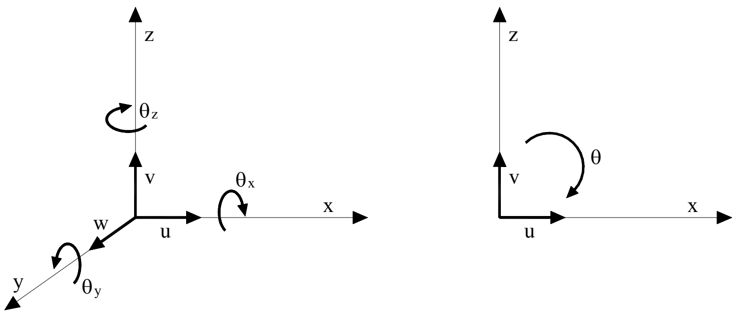


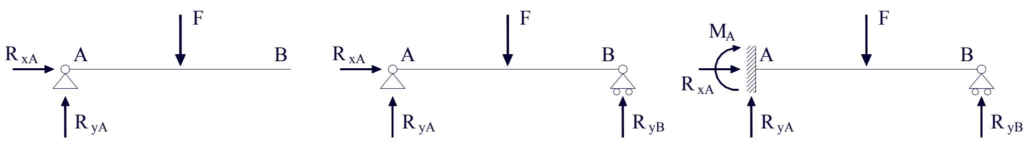
Fig. 1.1 – sistema spaziale – sistema piano

Valutando il numero di vincoli rispetto ai gradi di libertà della struttura, e considerando che, nel piano, le equazioni d'equilibrio per ogni elemento strutturale sono tre:

Σ Fx = 0 $\qquad$ Σ Fy = 0 $\qquad$ Σ M = 0

possiamo suddividere i sistemi di travi in tre categorie:

SISTEMI LABILI	SISTEMI ISOSTATICI	SISTEMI IPERSTATICI



n° g.d.l. > n° vinc. n° eq. > n° incogn.	n° g.d.l. = n° vinc. n° eq. = n° incogn.	n° g.d.l. < n° vinc. n° eq. < n° incogn.

- Per i sistemi labili le incognite, cioè le reazioni vincolari sono in numero minore delle equazioni d'equilibrio. Tranne in casi particolari, il sistema di equazioni non ha soluzione e l'equilibrio è impossibile.
- I sistemi isostatici sono caratterizzati da tante incognite quante sono le equazioni di equilibrio: l'equilibrio, quindi, esiste e la soluzione è unica.
- Nei sistemi iperstatici il numero di incognite è superiore a quello delle equazioni di equilibrio. Ciò significa che esistono infinite soluzioni che soddisfano il sistema. La soluzione esatta, però, è solo quella congruente con le caratteristiche di deformabilità degli elementi che compongono la struttura e con i suoi vincoli.

  In breve, quindi, per risolvere un problema iperstatico, le equazioni di equilibrio non sono in numero sufficiente ed è necessario introdurre delle nuove relazioni che ci vengono fornite dalla congruenza degli spostamenti con i vincoli della struttura.

Prendiamo come esempio la trave incastrata-appoggiata di figura 1.2.
Per risolvere il problema 1 volta iperstatico, può essere utilizzato il cosiddetto *metodo delle forze*, che consiste, in prima battuta, nel sostituire i vincoli sovrabbondanti con le rispettive reazioni vincolari.

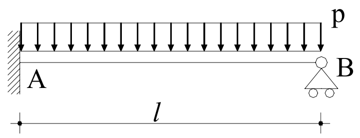


Fig. 1.2 – trave incastrata-appoggiata

In questo caso, ad esempio, il carrello in B può essere sostituito con la corrispondente reazione vincolare R_{yB}, assunta come *incognita iperstatica*. In questo modo il sistema torna ad essere isostatico sebbene, oltre ad essere sottoposto ad un carico distribuito noto è soggetto anche ad una forza concentrata in B il cui valore è sconosciuto (Figura 1.3).
Grazie al *principio di sovrapposizione degli effetti*, la mensola riportata in Figura 1.3 può essere considerata come il risultato della somma di due mensole diversamente caricate: la prima con il carico distribuito noto, la seconda con il carico concentrato incognito.

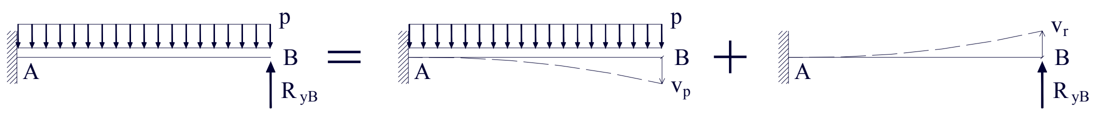


Fig. 1.3

Ognuno dei due sistemi di carico provoca uno spostamento verticale in B. La congruenza con i vincoli esterni, però, (in questo caso il carrello) impone che in B lo spostamento verticale sia nullo. Di conseguenza, si deve avere necessariamente $\mathbf{v_p+v_r = 0}$. Questa è la relazione in più che consente di avere tante equazioni (3 di equilibrio più 1 di congruenza) quante sono le incognite (M_A, R_{xA}, R_{yA}, R_{yB}), per trovare la soluzione del problema iperstatico
Attraverso l'integrazione *dell'equazione differenziale della linea elastica*,che governa la deformazione della trave sotto i carichi dati $v'' = -\frac{M}{EJ}$, si ottiene che:

$$v_p = -\frac{pl^4}{8EJ} \quad ; \quad v_r = \frac{R_{yB} l^3}{3EJ} \quad \Rightarrow \quad v_p = -v_r \quad \Rightarrow \quad R_{yB} = \frac{3}{8} pl$$

Conoscendo, ora, grazie alla congruenza, il valore di R_{yB}, risulta possibile applicare le 3 restanti equazioni di equilibrio per trovare le tre incognite rimaste.

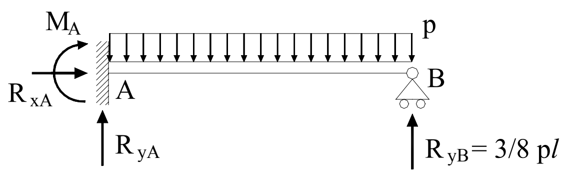


Fig. 1.4

La Trave Continua e l'Equazione dei Tre Momenti

In maniera del tutto analoga è possibile risolvere il problema iperstatico legato ad una trave continua soggetta ad un carico uniformemente distribuito come quella in figura che, nel caso specifico, avendo due appoggi intermedi, è due volte iperstatica. In generale, infatti, si può affermare che i gradi di iperstaticità di una trave continua con n campate sono n –1.

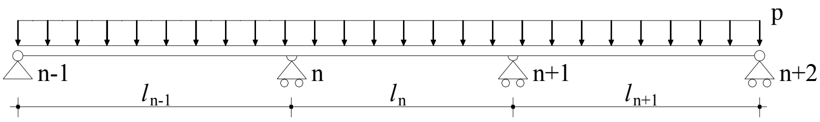
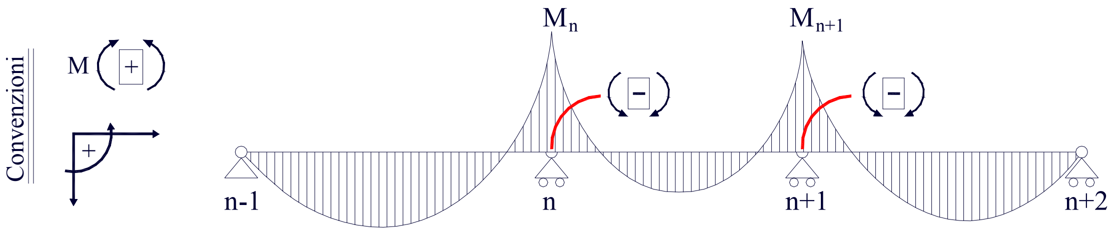


Fig. 1.5

In questo caso conviene assumere come incognite iperstatiche i valori dei momenti che si sviluppano in corrispondenza dei due carrelli centrali. Si interrompe, quindi, la continuità della trave introducendo due cerniere in corrispondenza degli appoggi e si ripristina il sistema statico iniziale applicando in questi nodi le reazioni corrispondenti ai vincoli eliminati.
Dato che sugli appoggi di una trave continua i momenti tendono le fibre superiori, le reazioni vincolari corrispondenti avranno verso opposto, come illustrato nella figura *1.6.*

sistema iniziale



sistema svincolato

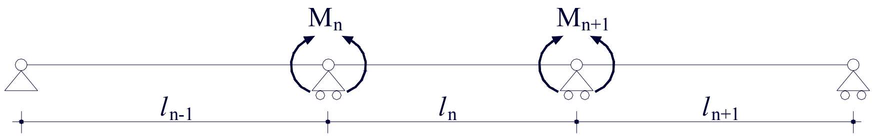


Fig. 1.6

Le reazioni vincolari M_n ed M_{n+1} devono essere tali da garantire la congruenza degli spostamenti negli appoggi. In effetti, l'introduzione delle cerniere permetterebbe, in teoria, a due tronchi di trave contigui di ruotare liberamente (fig.*1.7*) l'uno rispetto all'altro ($\theta_n \neq \theta_n^{'}$ e $\theta_{n+1} \neq \theta_{n+1}^{'}$), mentre, nel sistema reale, gli stessi tronchi di trave sono collegati attraverso un vincolo di continuità che impone l'uguaglianza delle rotazioni così come illustrato in figura *1.8*. Per cui, per la congruenza, si deve avere

$$\theta_n = \theta_n^{'} \text{ e } \theta_{n+1} = \theta_{n+1}^{'}$$

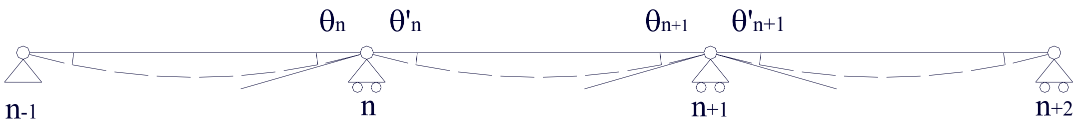


Fig. 1.7 – deformata del sistema svincolato

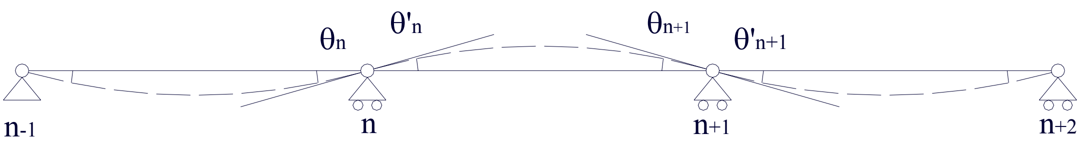


Fig. 1.8 – deformata del sistema reale

Queste ultime sono le due equazioni di congruenza che, sommate alle tre equazioni di equilibrio, ci consentiranno di risolvere il problema due volte iperstatico.
Bisogna trovare, quindi, le relazioni che esprimono le rotazioni di un singolo tronco di trave sotto il carico dato e sotto le incognite iperstatiche, o meglio, bisogna valutare come si deforma una trave appoggiata soggetta ad un carico uniformemente ripartito e a due momenti applicati alle sue estremità.

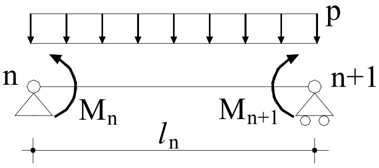


Fig. 1.9 – Sistema di carichi a cui è soggetto uno dei tronchi di trave che compongono la trave continua

Le rotazioni θ_n e θ_{n+1} possono essere ottenute per sovrapposizione degli effetti considerando la trave soggetta a tre diverse condizioni di carico (solo il carico ripartito, solo il momento a destra, solo il momento a sinistra) come illustrato in figura 1.10:

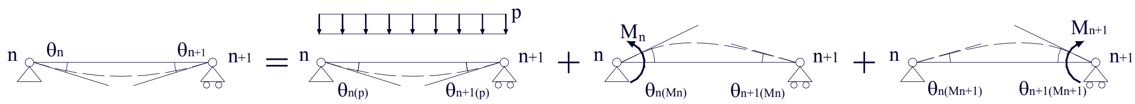


Fig. 1.10 – sovrapposizione degli effetti

$$\text{quindi} \qquad \begin{cases} \theta_{\mathrm{n}} = \theta_{\mathrm{n(p)}} + \theta_{\mathrm{n(Mn)}} + \theta_{\mathrm{n(Mn+1)}} \\ \theta_{\mathrm{n+1}} = \theta_{\mathrm{n+1(p)}} + \theta_{\mathrm{n+1(Mn)}} + \theta_{\mathrm{n+1(Mn+1)}} \end{cases} \tag{1}$$

Anche in questo caso, l'integrazione dell'equazione differenziale della linea elastica fornisce i valori delle rotazioni d'estremità relative alle tre condizioni di carico.
Assumendo per convenzione, le rotazioni positive quando antiorarie, si ha:

$$\begin{aligned} &\theta_{\mathrm{n(Mn)}} = \frac{l_{\mathrm{n}}}{3\mathrm{E_nJ_n}}\mathrm{M_n} \quad ; \quad \theta_{\mathrm{n(Mn+1)}} = \frac{l_{\mathrm{n}}}{6\mathrm{E_nJ_n}}\mathrm{M_{n+1}} \quad ; \quad \theta_{\mathrm{n(p)}} = -\frac{l_n^3}{24\mathrm{E_nJ_n}}\mathrm{p} \\ &\theta_{\mathrm{n+1(Mn)}} = -\frac{l_{\mathrm{n}}}{6\mathrm{E_nJ_n}}\mathrm{M_n} \quad ; \quad \theta_{\mathrm{n+1(Mn+1)}} = -\frac{l_{\mathrm{n}}}{3\mathrm{E_nJ_n}}\mathrm{M_{n+1}} \quad ; \quad \theta_{\mathrm{n+1(p)}} = \frac{l_n^3}{24\mathrm{E_nJ_n}}\mathrm{p} \end{aligned} \tag{2}$$

$\theta_{n(p)}$ e $\theta_{n+1(p)}$ sono le rotazioni dovute ad un carico uniformemente distribuito.
A questo punto non resta che imporre la congruenza degli spostamenti in corrispondenza degli appoggi. Si prendano, come esempio, la prima e la seconda campata della trave continua.
In corrispondenza dell'appoggio n, per la congruenza si deve avere $\boldsymbol{\theta_n = \theta'_n}$ e per l'equilibrio, ovviamente $M_n = M_n'$ (in valore assoluto).
Grazie alle (2) e all'equilibrio, quindi, si può scrivere l'equazione di congruenza:

$$\left(\frac{l_{\mathrm{n-1}}^3}{24\mathrm{E_{n-1}J_{n-1}}}\mathrm{p_{n-1}} - \frac{l_{\mathrm{n-1}}}{6\mathrm{E_{n-1}J_{n-1}}}\mathrm{M_{n-1}} - \frac{l_{\mathrm{n-1}}}{3\mathrm{E_{n-1}J_{n-1}}}\mathrm{M_n} \right) - \left(-\mathrm{p_n}\frac{l_{\mathrm{n}}^3}{24\mathrm{E_nJ_n}} + \frac{l_{\mathrm{n}}}{3\mathrm{E_nJ_n}}\mathrm{M_n} + \frac{l_{\mathrm{n}}}{6\mathrm{E_nJ_n}}\mathrm{M_{n+1}} \right) = 0$$

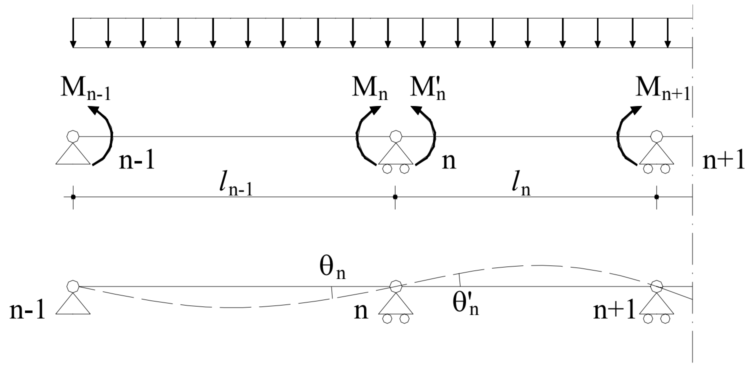


Fig. 1.11 – Congruenza sull'appoggio n

Se E e J sono costanti lungo tutta la trave, l'equazione (3) si semplifica eliminando quasi completamente il denominatore e assumendo la forma:

$$\frac{1}{24}\left(l_{n-1}^{3}p_{n-1}+l_{n}^{3}p_{n}\right)=\frac{1}{6}\left(l_{n-1}M_{n-1}+l_{n}M_{n+1}\right)+\frac{1}{3}\left(l_{n-1}+l_{n}\right)M_{n} \qquad (4)$$

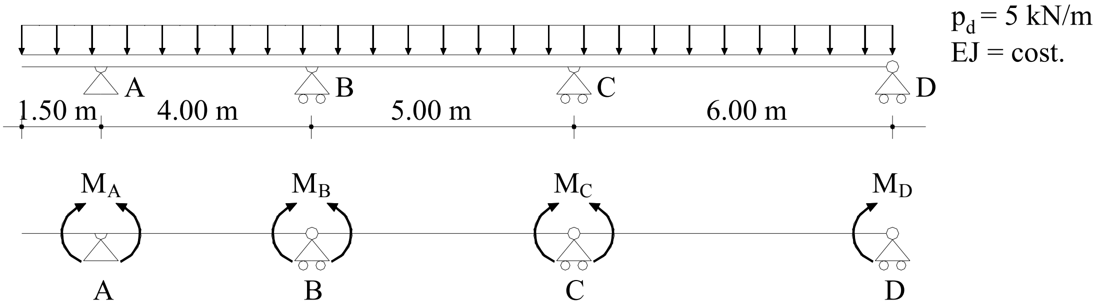
In maniera analoga può essere scritta l'equazione di congruenza per l'appoggio successivo e tutti gli altri eventuali appoggi in eccesso. In questo modo si ottengono tante equazioni quanti sono i momenti incogniti.

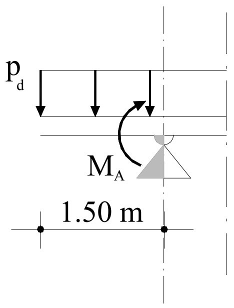
In conclusione, volendo generalizzare, si può affermare che:

- ⇒ Se la trave continua è composta da 2 sole campate (1 volta iperstatica), l'incognita è solo M_n poiché M_{n-1} e M_{n+1} sono noti essendo, infatti, uguali a zero. Una sola equazione di congruenza, quindi è sufficiente per risolvere il problema.
- ⇒ Se la trave continua è composta da 3 campate (2 volte iperstatica), le incognite sono 2: bisogna, quindi scrivere 2 equazioni (una per ogni vincolo intermedio) e risolvere il sistema.
- ⇒ In generale se la trave continua è composta da n campate (n-1 volte iperstatica), è necessario scrivere n-1 equazioni in n-1 incognite.

Applicazione

Trovare le reazioni vincolari e le caratteristiche della sollecitazione della trave continua su 3 campate più 1 mensola illustrata in figura:





Il problema è 2 volte iperstatico: le incognite, infatti, sono M_B e M_C.

M_A e M_D invece, hanno valore noto:

- ⇒ M_D = 0 dato che si trova in corrispondenza di una cerniera di estremità
- ⇒ M_A è noto poiché, qualsiasi cosa succeda lungo il resto della trave, il momento sull'appoggio A deve equilibrare il momento trasmesso dalla mensola e quest'ultimo si trova in maniera univoca:

$$M_A = p_d l \frac{l}{2} = p_d \frac{l^2}{2} = 5.625\,\mathrm{kN\cdot m}$$

Avendo 2 incognite, M_B e M_C, bisogna scrivere 2 equazioni di congruenza, una relativa all'appoggio B e l'altra all'appoggio C. Con riferimento alla (4), quindi, si avrà:

$$\begin{cases} \frac{1}{24}(64\cdot 5+125\cdot 5)=\frac{1}{6}(4\cdot 5.625+5\cdot M_C)+\frac{1}{3}(4+5)\cdot M_B \\ \frac{1}{24}(125\cdot 5+216\cdot 5)=\frac{1}{6}(5\cdot M_B+6\cdot 0)+\frac{1}{3}(5+6)\cdot M_C \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3.75+3\cdot M_B+0.833\cdot M_C=39.375 \\ 0.833\cdot M_B+3.66\cdot M_C=71.04 \end{cases}$$

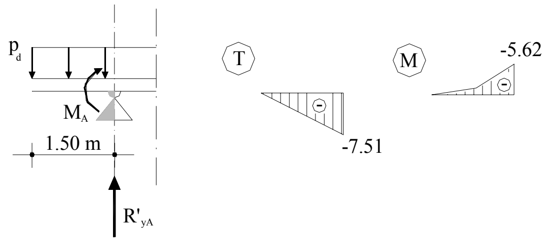
Per risolvere il sistema si può procedere, molto semplicemente, per sostituzione:

$$M_B=\frac{35.625-0.833\cdot M_C}{3} \qquad \Rightarrow \qquad 0.833\cdot\frac{35.625-0.833\cdot M_C}{3}+3.66\cdot M_C=71.04$$

$$M_B=6.94\,\mathrm{kN\cdot m} \qquad M_C=17.8\,\mathrm{kN\cdot m}$$

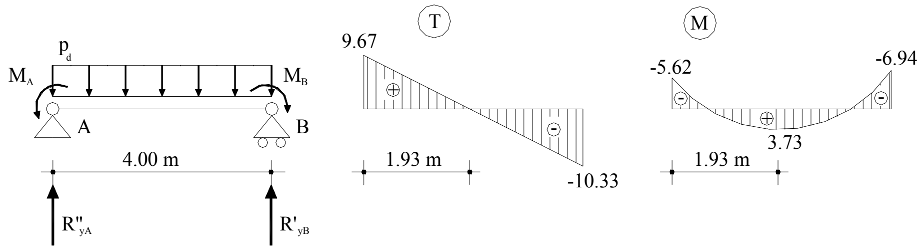
A questo punto è possibile determinare le caratteristiche della sollecitazione per ogni tratto di trave:

a) <u>Mensola</u>



$R'_{yA} = p_d \cdot l = 7.5$ kN
$T_{(x)} = - p_d \cdot x$
$T'_A = - 7.5$ kN
$M_{(x)} = - p_d \cdot x^2/2$
$M_A = - 5.62$ kN·m

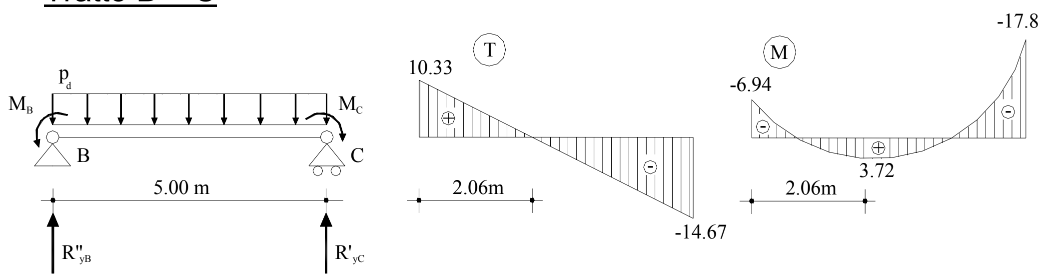
b) <u>Tratto A - B</u>



$R''_{yA} = p_d \cdot l/2 + (M_A - M_B)/l = 9.67$ kN
$T_{(x)} = 9.67 - p_d \cdot x$
$M_{(x)} = -5.62 + 9.67 \cdot x - p_d \cdot x^2/2$

$R'_{yB} = p_d \cdot l - R''_{yA} = 10.33$ kN
$T_{(x)} = 0 \quad \rightarrow \quad x = 9.67/5 = 1.93$ m
$M_{(1.93)} = 3.73$ kN·m

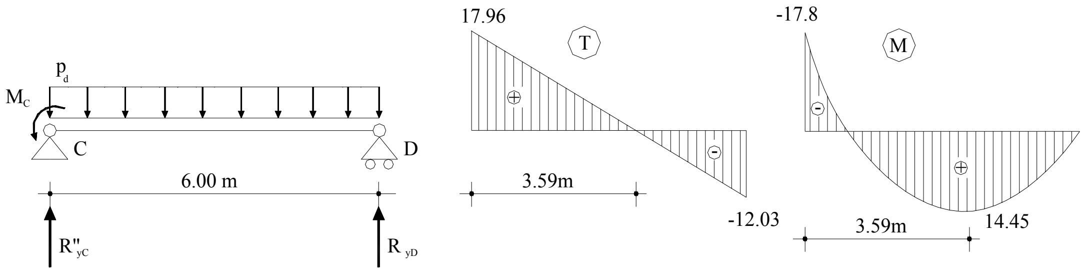
c) <u>Tratto B – C</u>



$R''_{yB} = p_d \cdot l/2 + (M_B – M_C)/l = 10.33$ kN
$T_{(x)} = 10.33 - p_d \cdot x$
$M_{(x)} = -6.94 + 10.33 \cdot x - p_d \cdot x^2/2$

$R'_{yC} = p_d \cdot l - R''_{yB} = 14.67$ kN
$T_{(x)} = 0 \quad \rightarrow \quad x = 10.33/5 = 2.06$ m
$M_{(2.06)} = 3.72$ kN·m

d) Tratto C - D



$R''_{yC} = p_d \cdot l/2 + M_C/l = 17.96$ kN

$R_{yD} = p_d \cdot l - R''_{yC} = 12.03$ kN

$T_{(x)} = 17.96 - p_d \cdot x$

$T_{(x)} = 0 \quad \rightarrow \quad x = 17.96/5 = 3.59$ m

$M_{(x)} = -17.8 + 17.96 \cdot x - p_d \cdot x^2/2$

$M_{(3.59)} = 14.45$ kN·m

e) Diagrammi completi della trave continua